

# **Árvores de Agregação Média para a Análise e Otimização do Problema de Roteamento de Veículos com Muitos Objetivos e Janelas de Tempo Flexíveis**

**Lucas Carvalho Oliveira Matsueda**

Departamento de Computação - Universidade Federal de Ouro Preto  
Campus Universitário, Morro do Cruzeiro, CEP 35.400-000, Ouro Preto - MG, Brasil  
lucasmatsueda@gmail.com

**Alan Robert Resende de Freitas**

Departamento de Computação - Universidade Federal de Ouro Preto  
Campus Universitário, Morro do Cruzeiro, CEP 35.400-000, Ouro Preto - MG, Brasil  
alandefreitas@gmail.com

**Frederico Gadelha Guimarães**

Departamento de Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Antônio Carlos 6627, CEP 31.270-901, Belo Horizonte - MG, Brasil  
fredericoguimaraes@ufmg.br

## **RESUMO**

Este trabalho propõe um problema de roteamento de veículos com muitos objetivos e janelas de tempo flexíveis (MOPRV). Propomos uma abordagem baseada em dois algoritmos evolucionários multiobjetivo (NSGA-II e NSGA-III) e um método para a redução e visualização de objetivos (Agregação de árvores). Observamos a possibilidade de agregação entre os objetivos através de um estudo da harmonia e conflito entre eles, reduzindo o problema de seis para três objetivos. As experiências mostram que as soluções para o problema reduzido têm bons valores para todos os objetivos em comparação com as soluções para o problema completo. Além disso, os resultados mostram que é mais vantajoso visualizar a relação entre os objetivos e, em seguida, otimizar o problema reduzido do que otimizar diretamente a formulação original do problema, considerando todos os seis objetivos.

**PALAVRAS CHAVE.** Problema de Roteamento de Veículos, Muitos Objetivos, Redução de Objetivos, Algoritmos Evolucionários Multiobjetivo.

**Área principal:** Logística e Transporte (L&T) e Metaheurística (MH)

## **ABSTRACT**

This dissertation proposes a many-objective vehicle routing problem with flexible time windows. We propose an approach based on two multiobjective evolutionary algorithms (NSGA-II and NSGA-III) and a method for reduction and visualization of objectives (Aggregation Trees). We observed the possibility of aggregation between the objectives through a study of the harmony and conflict between them, reducing the problem from six to three objectives. The experiments show the solutions for the reduced problem have good values for all objectives when compared to solutions for the complete problem. Moreover, the results show that it is more advantageous to visualize the relationship between objectives and then to optimize the reduced problem than to directly optimize the original formulation of the problem considering all six objectives.

**KEYWORDS.** Vehicle Routing Problems, Many-objective, Reduction of Objectives, Multi-objective Evolutionary Algorithms.

**Main area:** Logistics and Transport (L&T) and Metaheuristic (MH)

## 1. Introdução

Grande parte dos trabalhos presentes na literatura que abordam os Problemas de Roteamento de Veículos (PRV) apresentam soluções em que apenas um objetivo, relacionado à minimização da distância total percorrida pela frota de veículos, é tratado. Entretanto, diversos problemas de logística não são limitados somente a este objetivo, soluções para estes problemas podem envolver outros fatores, como a satisfação do consumidor, satisfação do motorista, segurança e violação de restrições.

Diante deste contexto, este trabalho propõe um estudo sobre os principais objetivos tratados na literatura para o PRV, bem como para o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (PRVJT) (Seção 2). Assim, propomos uma formulação de muitos objetivos do PRV com restrições de tempo (Seção 3). Em nossa metodologia (Seção 4), um *Nondominated Sorting Genetic Algorithm III* (NSGA-III) é usado para otimizar simultaneamente todos os objetivos em nosso modelo e os resultados foram analisados com Árvores de Aagração (*Aggregation Tree* - AT), uma técnica para identificar a relação entre os objetivos em problemas multiobjetivo. Para combinar e analisar os resultados para instâncias diferentes, propomos uma Árvore de Agregação Média, que representa a relação média entre os objetivos sobre um conjunto de instâncias. As sugestões de agregação levaram a uma nova formulação do problema em que os objetivos com maior harmonia foram agregados em novos objetivos. Posteriormente, um novo modelo reduzido foi otimizado por um *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II).

Assim, as contribuições deste trabalho são: (i) Árvores de Agregação Média para o cálculo e uma única visualização da harmonia entre os objetivos em um conjunto de instâncias, representando o conflito médio para um conjunto de instâncias; (ii) Análise da relação entre grupos relevantes de objetivos em problemas de roteamento de veículos, bem como as regiões de conflito para os objetivos apresentados; (iii) Uma formulação reduzida do problema original baseado na análise das árvores médias, assim como um estudo de como a redução de dimensionalidade pode simular a aproximação de Pareto em comparação com métodos para o problema original.

A seção experimental deste trabalho considera um conjunto bem conhecido de instâncias para o problema [Solomon, 1987] (Seção 5). Assim, a AT média sugere muitas agregações possíveis no problema formulado, conseguindo bons resultados em todos os objetivos originais, otimizando apenas o modelo reduzido subsequente.

## 2. Objetivos no PRV

O PRV tem sido abordado de diferentes maneiras e muitos novos objetivos foram introduzidos ao problema. No entanto, diversos trabalhos na literatura procuram minimizar os custos com transporte [Yu et al., 2011]. Estes custos estão diretamente relacionados com a distância total percorrida pela frota de veículos (custos variáveis). Assim, minimizar este objetivo tem sido uma das metas mais abordadas no PRV clássico, bem como em suas variantes.

No entanto, cada veículo possui uma capacidade de transporte. Assim, alguns modelos tratam o problema considerando custos de aquisição e manutenção (custos fixos) destes mesmos veículos. Portanto, os PRVs podem considerar objetivos relacionados com custos fixos e variáveis [Sousa et al., 2011], bem como encontrar o número mínimo de veículos necessários para uma rota.

Outros autores propõem formulações do PRV com restrições de tempo que permitem o atendimento aos consumidores fora de suas janelas de tempo [Beham, 2007]. Estas generalizações do problema geralmente transformam as restrições referentes à janela de tempo em um objetivo que minimiza o número de restrições violadas, o tempo total de espera dos veículos nos clientes devido à precocidade ou atraso na chegada, ou ambos objetivos ao mesmo tempo. A penalidade de chegada após o fechamento da janela de tempo envolve a satisfação do cliente e reputação da empresa, onde o serviço insatisfeito pode trazer diversos prejuízos para a distribuidora.

Assim, quando o problema envolve restrições de tempo, o custo total de encaminhamento e agendamento não incluem apenas a distância e o tempo total de viagem, mas também o custo do tempo incorrido na espera quando um veículo chega muito cedo em um determinado cliente.

Esta quantidade de tempo de espera significa que os recursos da empresa são subutilizados, e que envolve custos adicionais relacionados com os veículos e com os trabalhadores. Por esta razão, muitos trabalhos na literatura para o PRVJT também consideram minimizar o tempo total de espera dos veículos nos consumidores [Bhusiri et al., 2014].

As formulações do PRV, na qual a minimização da rota mais longa é considerada como meta também são propostas constantemente [Karabulut e Tasgetiren, 2014]. Para este problema procuram-se soluções em que o comprimento de viagem da maior rota seja a menor possível. Minimizar a maior rota pode envolver custos de operação e satisfação do consumidor. Assim, quanto menor é o percurso da maior rota, menor é o tempo em que o depósito central necessita ficar aberto e, menor é a espera do último cliente a ser atendido.

Outros objetivos são projetados para equilibrar as disparidades entre rotas [Baños et al., 2013]. Para definir este objetivo é preciso considerar a carga de trabalho nas rotas que podem ser expressadas como o número de cliente visitados, a quantidade de produtos entregues e o tempo necessário ou comprimento das rotas, por exemplo. Uma das questões que motivam o estudo deste problema se refere a satisfação dos motoristas, equilibrando sua carga de trabalho.

### 3. PRVJT com Muitos Objetivos

O problema proposto neste trabalho é denominado: Problema de Roteamento de Veículos com Muitos Objetivos e Janelas de Tempo Flexíveis (MOVVP). Este problema é uma generalização do problema de roteamento de veículos com janelas de tempo [Larsen e Danmarks, 1999], no qual a restrição referente à janela de tempo é transformada em objetivo. Além disto, outras funções objetivo são introduzidas no problema. A modelagem matemática para o problema proposto é uma adaptação da modelagem proposta por Larsen e Danmarks [1999] para o PRVJT.

#### 3.1. Formulação Matemática

O MOVVP pode ser definido como: seja um grafo não direcionado  $G = (C, A)$ , onde  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$  é o conjunto de vértices e  $A = \{(c_i, c_j) : c_i, c_j \in C \text{ e } c_i \neq c_j\}$  o conjunto de arestas. Dado que os demais vértices representam os consumidores, o conjunto  $N$  é a união entre o conjunto  $C$  e os vértices  $c_0$  e  $c_{n+1}$ . Entretanto, Cada aresta  $(c_i, c_j)$  tem um valor associado  $d_{ij} \geq 0$  e  $t_{ij} \geq 0$  que representam respectivamente, o custo e o tempo de se alcançar o vértice  $c_j$  a partir do vértice  $c_i$ . Cada consumidor  $c_i$  está associado a uma janela de tempo  $[a_i, b_i]$ , um tempo de serviço  $p_i$ , e uma demanda de entrega  $w_i$ . Para atender aos consumidores, tem-se disponível uma frota  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$  de veículos homogêneos com capacidade máxima de carga  $Q$ . As rotas que compõem uma solução são representadas pelo conjunto  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ , onde  $r_m$  é o custo da rota  $m$ . Cada veículo deve atender uma única rota, assim  $|R| = |V|$ .

##### 3.1.1. Variáveis de Decisão

São três as variáveis de decisão do MOVVP. A variável de decisão  $x_{ij}^v$  determina se o veículo  $v$  faz o percurso do consumidor  $i$  para o consumidor  $j$ , recebendo o valor 1, se verdadeiro, e 0 caso contrário. Já a variável de decisão  $z_i^v$  indica o instante de tempo em que o veículo  $v$  chega ao consumidor  $i$ . Por fim, a variável de decisão  $s_i^v$  representa o instante de tempo em que o veículo  $v$  atende o consumidor  $i$ .

##### 3.1.2. Funções Objetivo

Fundamentando-se nas abordagens e na constância dos objetivos apresentados na literatura, foram escolhidos seis objetivos para o MOVVP. O objetivo  $f_1$ , definido na Equação 1, visa a minimização dos custos relacionados com a distância total percorrida pelos veículos. Este custo é determinado pela soma das distâncias entre os clientes na ordem em que eles foram visitados. O objetivo  $f_2$ , definido na Equação 2, é formulado a fim de que o número de rotas ( $|R|$ ) necessárias para atender os clientes seja o menor. No entanto, uma rota é determinada por uma viagem que começa e termina no depósito. Cada veículo deve atender uma única rota, sendo que um número ilimitado de veículos é considerado.

$$\text{Minimize } f_1 = \sum_{v \in V} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij}^v \quad (1)$$

$$\text{Minimize } f_2 = |R| \quad (2)$$

O objetivo  $f_3$ , definido na Equação 3 é o resultado da transformação da restrição de tempo no próprio objetivo. Assim,  $f_3$  visa a minimização do somatório dos atrasos dos veículos. Caso um veículo chegue a um consumidor depois do tempo de fim da janela de tempo, o atraso é computado como a diferença entre o tempo de chegada do veículo e o tempo de fim da janela.

$$\text{Minimize } f_3 = \sum_{i \in N} \sum_{v \in V} \text{Max}(z_i^v - b_i, 0) \quad (3)$$

O objetivo  $f_4$ , definido na Equação 4, visa a minimização do somatório do tempo de espera dos veículos. Caso um veículo chegue a um consumidor antes do tempo de início da janela de tempo, a espera é computada como a diferença entre o tempo de abertura da janela e o tempo de chegada do veículo.

$$\text{Minimize } f_4 = \sum_{i \in N} \sum_{v \in V} \text{Max}(a_i - z_i^v, 0) \quad (4)$$

O objetivo  $f_5$ , definido na Equação 5, considera a minimização do maior percurso (rota) existente na solução. O objetivo  $f_6$ , definido na Equação 6, visa a minimização da diferença entre a rota mais longa e a rota mais curta. Estes dois objetivos são calculados em termos de distância.

$$\text{Minimize } f_5 = \text{Max}_v \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij}^v \quad (5)$$

$$\text{Minimize } f_6 = \text{Max}_v \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij}^v - \text{Min}_v \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij}^v \quad (6)$$

### 3.1.3. Restrições

Apresentadas as funções objetivo, todas as soluções devem satisfazer um conjunto de restrições:

$$\sum_{v \in V} \sum_{j \in N} x_{ij}^v = 1; \quad \forall i \in C \quad (7)$$

$$\sum_{i \in N} w_i \sum_{j \in N} x_{ij}^v \leq Q; \quad \forall v \in V \quad (8)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^v = 1; \quad \forall v \in V \quad (9)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i(n+1)}^v = 1; \quad \forall v \in V \quad (10)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij}^v - \sum_{i \in N} x_{ji}^v = 0; \quad \forall j \in C, \forall v \in V \quad (11)$$

$$s_i^v + p_i + t_{ij} - L(1 - x_{ij}^v) \leq z_j^v; \quad \forall i, j \in N, \forall v \in V \quad (12)$$

$$a_i \leq s_i^v; \quad \forall i \in N \quad (13)$$

$$x_{ij}^v \in \{0, 1\}, \forall i, j \in N; \quad \forall v \in V \quad (14)$$

A Equação 7 garante que cada cliente é visitado por um único veículo. A Equação 8 especifica que os veículos não devem ultrapassar a capacidade máxima de carga. As Equações 9 e 10 demonstram que todos os veículos devem partir e retornar ao depósito central. A Equação 11 garante que os veículos partam de um consumidor para outro (continuidade). A restrição de tempo é garantida pela Equação 12, onde o instante de chegada de um veículo  $v$  a um consumidor  $j$  não poderá ocorrer antes do tempo de chegada ao consumidor anterior  $i$  mais o tempo de serviço no primeiro, mais o tempo de percurso no trecho  $(i,j)$  que é  $t_{ij}$ . A garantia de que o serviço só pode ser iniciado após a abertura da janela é dada pela Equação 13. Finalmente, a Equação 14 garante a integralidade das variáveis do problema.

#### 4. Metodologia

Algoritmos evolucionários baseados em Pareto-dominância, tais como o NSGA-II, têm sido amplamente utilizados para resolver problemas de roteamento de veículos multiobjetivo devido a sua generalidade e flexibilidade em relação à formulação do problema. No entanto, quanto maior o número de objetivos de um problema, pior é o desempenho desses algoritmos.

Neste contexto, um NSGA-III é utilizado para otimizar o MOVRP Completo (problema com seis objetivos) e uma ferramenta denominada Árvores de Agregação Média é utilizada para analisar a harmonia e o conflito entre os seis objetivos do problema. Assim, uma versão reduzida do MOVRP que considera a agregação dos objetivos mais harmoniosos no conjunto de dados é então proposta e um NSGA-II é usado para resolver a versão reduzida do problema. Esta seção apresenta os processos realizados pelo NSGA-II, NSGA-III e Árvores de Agregação Média.

##### 4.1. Árvores de Agregação Média

Uma Árvore de Agregação [de Freitas et al., 2015] é uma ferramenta que nos permite visualizar a redundância e o conflito entre os objetivos de um problema de otimização. Esta abordagem baseia-se na organização de objetivos em ramos de árvores que representam as melhores possibilidades de agregação num problema. A saída do algoritmo é uma árvore com as seguintes propriedades: (i) nós folha representam o objetivo na forma  $f_i$ , onde  $i$  é o número do objetivo; (ii) os pais dos nós folha representam um objetivo composto na forma  $f_a + f_b - c$ , onde  $f_a$  e  $f_b$  são os objetivos agregados e  $c$  é o conflito entre eles; (iii) outros pais representam objetivos compostos de classes mais altas formados de forma semelhante. Os valores de conflito nestes nós incluem apenas o conflito entre objetivos já compostos de seus filhos; (iv) os objetivos são, respectivamente, agrupados por sua harmonia e, conseqüentemente, primos distantes na árvore representam objetivos menos harmoniosos.

O problema é que a única forma de verificar algum comportamento de agregação padrão para um conjunto de instâncias é analisar individualmente as árvores de agregação de cada uma destas instâncias. No entanto, propomos uma nova forma para analisar o conflito entre os objetivos para um conjunto de instâncias, tal abordagem foi denominada de Árvores de Agregação Média. As árvores de agregação média permitem que a análise de um conjunto de instâncias seja feita observando apenas uma árvore de agregação que representa a média entre este conjunto de instâncias.

As árvores médias são geradas a partir do cálculo da harmonia de todas as instâncias testadas. O procedimento realizado para gerar as árvores médias considera uma matriz de harmonia média que é dada como base para a agregação dos objetivos com maior harmonia. Assim, o processo que calcula a árvore média primeiro calcula a matriz de harmonia para cada instância específica, faz a soma de tais matrizes que representam a harmonia entre os objetivos de cada instância de teste e, por fim, cada elemento da matriz resultante da soma é dividido pelo número de instâncias de teste que resulta em uma matriz que apresenta valores médios de harmonia entre os objetivos para todas as instâncias. Assim, é considerando a matriz de harmonia média que uma iteração da árvore média agrega os objetivos de um problema de otimização.

As Árvores de Agregação Média podem considerar 3 medidas gerais de conflito: direta, maxmin e não-paramétrica. A medida mais comum de conflito, e a que usamos neste trabalho,

é a medida não-paramétrica definida como  $CA_{ab} = \frac{\sum_k \sum_i |R_{kia} - R_{kib}|}{m}$ , onde  $CA_{ab}$  é o conflito médio entre os objetivos  $a$  e  $b$  e  $R_{ijk}$  é a classificação da solução  $i$  (de  $n$  soluções) no objetivo  $j$  para a instância  $k$  (de  $m$  instâncias). A harmonia entre dois objetivos, a partir dessa perspectiva, é inversamente proporcional ao conflito não-paramétrico:  $H_{ab} = 1 - \frac{CA_{ab}}{C_{max}}$ , onde  $C_{max} = \sum_{i=1}^n |2i - n - 1|$  é o valor máximo médio de conflito não-paramétrico para  $n$  soluções e  $m$  instâncias. Ramos nas árvores também são coloridos de acordo com a sua região de conflito. A estrutura do algoritmo para gerar a árvore média e descrita no Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1:** CONSTRUINDO UMA ÁRVORE DE AGREGAÇÃO MÉDIA

---

**Entrada:**  $p$  Matrizes  $X_{n \times m}$  com conjunto de valores de função objetivo para  $m$  objetivos e  $n$  soluções

**Saída:** Árvore de Agregação Média  $t$

- 1 **início**
- 2   Inicializar árvore  $t$  com um nó raiz e todos objetivos como filhos;
- 3   **para** cada matriz  $p$  **faça**
- 4      $X_p \leftarrow$  normalizar( $X_p$ );
- 5   **fim**
- 6   **enquanto** ainda há objetivos a serem agregados **faça**
- 7     **para** cada matriz  $p$  **faça**
- 8       $X'_p \leftarrow$  reduzir( $X_p$ );
- 9       $X'_p \leftarrow$  normalizar( $X'_p$ );
- 10      $H_p \leftarrow$  matriz.harmonia( $X'_p$ );
- 11    **fim**
- 12     $H_{soma} =$  somar as  $p$  matrizes de harmonia  $H$ ;
- 13     $H_{media} =$  dividir  $H_{soma}$  por  $p$ ;
- 14     $a, b \leftarrow$  folha ou objetivos compostos com a maior harmonia;
- 15     $c \leftarrow$  conflito( $a, b$ );
- 16     $L \leftarrow$  região( $a, b$ );
- 17     $t$  recebe um novo nó  $nn$ ;
- 18     $nn$  recebe  $a$  e  $b$  como filhos;
- 19     $nn$  guarda o valor ( $c, L$ );
- 20     $a$  e  $b$  são agregados. Próxima iteração tem um objetivo a menos;
- 21 **fim**
- 22    Plotar a Árvore de Agregação Média  $t$ ;
- 23     $ordem \leftarrow$  nós folhas de  $t$  na ordem em que aparecem em  $t$ ;
- 24    Plotar o gráfico polar considerando a ordem
- 25 **fim**

---

## 4.2. NSGA-II e NSGA-III

Para representar um indivíduo (solução), uma lista que mantém todos os consumidores na ordem em que eles devem ser visitados pelos veículos é utilizado. Assim, um indivíduo pode ter a seguinte configuração [2 1 4 3 6 5 7]. Neste exemplo, a solução proposta sugere as visitas de veículos aos consumidores 2, 1, 4, 3, 6, 7 e 5, nesta ordem. No entanto, os veículos são obrigados a retornar ao depósito caso uma restrição seja violada. Neste caso, o número zero é inserido entre o último cliente visitado e o cliente subsequente da lista, representando o retorno de um veículo para o depósito central. Este processo garante que nenhuma restrição seja violada, garantindo a factibilidade das soluções geradas.

### 4.2.1. Operadores Genéticos

Os operadores de cruzamento utilizados neste trabalho são Cruzamento de Mapeamento parcial (PMX) [Sivanandam e Deepa, 2007] e o Cruzamento de Ordem (OX) [Sivanandam e Deepa,

2007]. No entanto, cada indivíduo filho pode sofrer mutação dada uma determinada probabilidade. Os operadores de mutação utilizados neste trabalho são Inserção por Mutação (ISM) [Deep e Mebrahtu, 2011], Mutação por Inversão Simples (SIM) [Deep e Mebrahtu, 2011] e Mutação por Troca (EM) [Deep e Mebrahtu, 2011]. Todos os operadores de mutação têm a mesma probabilidade de ser aplicado.

#### 4.2.2. Pontos de Referência

O NSGA-III utiliza um conjunto pré-definido de pontos de referência para assegurar a diversidade em soluções obtidas. Neste trabalho nós usamos uma abordagem sistemática que coloca pontos em um hiperplano normalizado  $\alpha(M-1)$ - que é igualmente inclinado para todos os eixos objetivo. Se  $p$  divisões são consideradas para cada objetivo, o número total de pontos de referência (H) em um problema M-objetivo é dado da seguinte forma:  $H = \binom{M+p-1}{p}$ .

#### 4.2.3. Configuração e Parâmetros

Os parâmetros do NSGA-II e NSGA-III assumiram valores iguais a 464, 500, 95% e 10% para o tamanho da população, número de gerações, probabilidade de cruzamento e probabilidade de mutação, respectivamente. Isto é, os valores de parâmetros para ambos algoritmos foram iguais, de modo que estes tivessem a menor influência possível nos resultados.

### 5. Experimentos

Para executar experimentos sobre os algoritmos, foi utilizado um conjunto de 56 instâncias propostos por Solomon [1987]. Assim, o NSGA-III proposto foi executado quatro vezes para cada instância testada, de modo que os seis objetivos do problema são otimizados simultaneamente. Cada execução do NSGA-III gera 464 soluções. Em um total de quatro execuções, 1856 soluções otimizadas foram geradas pelo NSGA-III para cada instância de teste.

As soluções otimizadas pelo NSGA-III, bem como dez mil soluções geradas de forma aleatória são utilizadas como entrada para as Árvores de Agregação Média. Através destas soluções que a ferramenta analisa e propõe a agregação dos objetivos mais harmoniosos para as instância de teste. No entanto, para cada instância testada duas árvores de agregação foram geradas. A primeira demonstrando a harmonia e conflito entre os objetivos para soluções aleatórias (soluções que não passaram pelo processo de otimização), e a segunda agregando os objetivos a partir das soluções otimizadas (soluções que passaram pelo processo de otimização através do NSGA-III). A fim de verificar a harmonia/ conflito global para todas as instâncias, árvores médias foram calculadas. Neste processo, a média da matriz de harmonia do algoritmo Árvores de Agregação foi calculada e a agregação foi baseada na matriz de harmonia média.

No entanto, quando o algoritmo das Árvores de Agregação não está embutido em um MOEA, podemos usar soluções não dominadas, ou qualquer conjunto de soluções, a fim de analisar a relação entre os objetivos. O uso de solução não-dominadas é útil para demonstrar o potencial de harmonia, ou objetivos que podem ser otimizados de uma maneira em que podemos melhorar ambos os objetivos. O uso de um conjunto de soluções, incluindo soluções dominadas é mais conveniente para mostrar harmonia inerente, quando a melhoria em um objetivo está relacionada com a melhoria em um outro objetivo.

Uma análise sobre as árvores geradas foi feita, e um padrão geral entre a harmonia dos objetivos para todas as instâncias foi observado. Assim, um modelo reduzido, com menos objetivos, do MOVPR é proposto e um NSGA-II que considera o problema reduzido é executado para todas as instâncias de Solomon [1987]. Para cada instância testada o NSGA-II foi executado quatro vezes, resultando em quatro conjuntos aproximados de Pareto. Posteriormente, a métrica de Cobertura foi utilizada para verificar a qualidade das soluções retornadas para o problema reduzido.

#### 5.1. Otimizando o MOPRV Original

De forma geral, o resultado para todas as instâncias testadas, que utilizou o NSGA-III para o problema completo, são semelhantes. Assim, a Figura 1 apresentam as soluções da primeira frente de Pareto de uma execução do NSGA-III em Gráficos Polares [de Freitas et al., 2015] para

uma instância de cada grupo proposto por Solomon [1987] (R, C, RC). Os objetivos nos gráficos polares são organizados por considerar a posição final dos nós filhos na AT Média. Cada solução não dominada de uma execução do NSGA-III é dada como entrada para a Árvore de Agregação e representada por uma linha nos gráficos polares. Quanto mais externa é a linha em um determinado objetivo, melhor é o valor desta solução para este objetivo. Por outro lado, quanto mais a linha se aproxima do centro dos gráficos em um objetivo, pior é o valor desta solução para este objetivo. As linhas estão agrupadas com um algoritmo PSA.

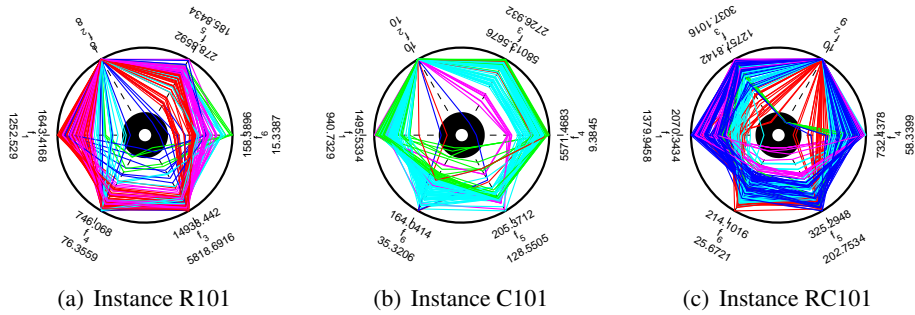
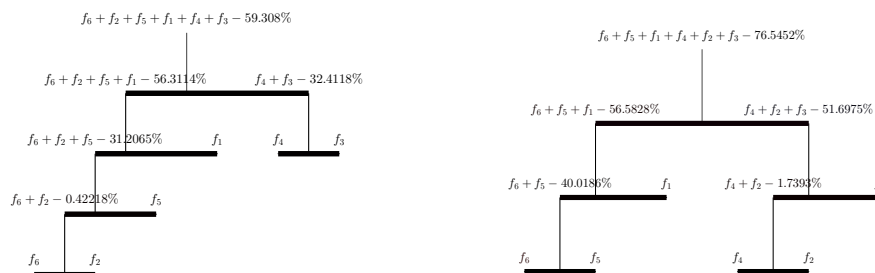


Figura 1: Gráficos Polares das instâncias do grupo R, C e RC para o MOVRP Completo

Contudo, todas as instâncias apresentaram comportamentos semelhantes quanto às soluções geradas pelo NSGA-III. Primeiramente, é possível observar que, para 2 dos 3 casos apresentadas, o NSGA-III gerou soluções com mesmo valor para o número de rotas ( $f_2$ ). Outro comportamento observado demonstra que na maioria dos casos bons para  $f_3$  (violação da restrição de tempo) leva à bons valores para  $f_4$  (espera dos veículos nos consumidores). Este comportamento foi também observado para os objetivos  $f_5$  (maior rota) e  $f_6$  (diferença entre a maior e a menor rota). O objetivo  $f_1$  (distância total percorrida) não demonstrou um comportamento padrão quando comparado com os demais objetivos do problema. Já o objetivo  $f_2$  quase sempre não interferiu no comportamento dos outros objetivos, isto porque os valores para este objetivo tiveram pouca variância.

## 5.2. Árvores Médias

Dois árvores foram geradas tendo como base a média da harmonia de todas as instâncias (uma para soluções otimizadas e outra para soluções aleatórias). As árvores médias para soluções aleatórias e otimizadas são apresentadas nas Figuras 2(a) e 2(b).



(a) Árvore de Agregação Média para Soluções Aleatórias (b) Árvore de Agregação Média para Soluções Otimizadas

Figura 2: Árvores de Agregação Média

A árvore média gerada a partir de soluções aleatórias é formada por dois ramos principais. O ramo da esquerda forma uma subárvore que é composta pelos objetivos  $f_6$ ,  $f_2$ ,  $f_5$  e  $f_1$ . Já o ramo da direita representa uma subárvore formada pelos objetivos  $f_4$  e  $f_3$ . Assim,  $f_6$  é agregado à  $f_2$  na



primeira iteração com um percentual muito baixo de conflito. O que significa que quase sempre o número de rotas não interfere no balanceamento de rota. O passo seguinte, agrega  $f_5$  ao objetivo composto  $f_6 + f_2$ . É possível notar que o conflito existente entre  $f_6$  e  $f_2$  é tão pequeno que agregar  $f_5$  à  $f_6 + f_2$ , ainda assim, possui menos conflito do que agregar  $f_4$  à  $f_3$ , por exemplo. Diante disso e considerando esta árvore média, agregar  $f_5$  à  $f_2$  ou à  $f_6$  é tão viável como agregar  $f_6$  à  $f_2$ . No entanto, minimizar a maior rota acaba, em muitos casos, por minimizar também a diferença entre a maior e a menor rota ou o número de rotas. A relação entre  $f_5$  e  $f_6$  é de fato esperada, uma vez que minimizar a maior rota proporciona um melhor equilíbrio entre as mesmas.

O objetivo de violação da restrição de tempo ( $f_3$ ) também possui pouco conflito quando comparado à espera dos veículos nos consumidores ( $f_4$ ). Essa agregação reflete que quanto menos tempo um veículo perde esperando a abertura de um consumidor, menor é a probabilidade de atender outros consumidores atrasado (depois do fim da janela de tempo). Dentre as agregações que envolvem algum objetivo original do problema (objetivo não agregado) a que possui maior conflito é a agregação entre  $f_1$  e  $f_6 + f_2 + f_5$ , fazendo da distância total percorrida um dos objetivos com maior conflito quando comparado com os demais objetivos do problema. Por fim, o algoritmo agrega os objetivos compostos  $f_6 + f_2 + f_5 + f_1$  e  $f_4 + f_3$ , resultando em um único objetivo composto que agrega todos os objetivos do problema.

A árvore média gerada a partir de soluções otimizadas apresenta uma estrutura diferente da árvore média das soluções aleatórias. A diferença para este caso está basicamente no comportamento do objetivo que considera a minimização do número de rotas. Para as soluções otimizadas  $f_2$  possuiu uma menor média de conflito com  $f_4$ , fazendo com que  $f_3$  fosse agregado posteriormente e  $f_1$  imediatamente agregado à  $f_6 + f_5$ . No entanto, algumas semelhanças podem ser observadas. Por exemplo,  $f_5$  e  $f_6$  continuam na subárvore da esquerda enquanto  $f_3$  e  $f_4$  permanecem na subárvore da direita. Isso enfatiza a possibilidade de que existe grande harmonia entre a violação da restrição de tempo e a espera dos veículos nos consumidores, bem como entre a maior rota e o balanceamento de rota. Por outro lado, se tratando de objetivos originais do problema,  $f_1$  esteve envolvido na agregação com maior conflito para ambas as árvores médias. Este fato demonstra que minimizar a distância total percorrida possui pouca harmonia quando comparado aos demais objetivos do problema. Um comportamento diferente foi apresentado por  $f_2$  para ambas árvores médias. Este, por sua vez, apresentou grande harmonia com  $f_6$  e  $f_4$ .

Assim, o comportamento de ambas árvores médias indicam as mesmas relações de conflito entre os grupos de objetivos. As agregações ocorrem em ordens diferentes, porém os grupos de objetivos são similares. Deste modo, pode-se inferir que o conflito/harmonia entre os objetivos do MOVRP é inerente ao espaço de busca, ou seja, os conjuntos Pareto aproximado possuem características semelhantes aos conjuntos de soluções aleatórias. A principal diferença da estrutura dos grupos de objetivos se dá pelo comportamento de  $f_2$ , ora agregado à subárvore da esquerda ( $f_1$ ,  $f_5$  e  $f_6$ ) ora agregado a subárvore da direita ( $f_3$  e  $f_4$ ).

### 5.3. Modelo Reduzido

As Árvores de Agregação apresentam o comportamento sobre o conflito e harmonia entre os objetivos de um problema de otimização. Assim, é papel do tomador de decisão avaliar e escolher quais objetivos serão agregados ou não, de acordo com seu interesse e experiência. Neste caso, faremos o papel do tomador de decisão para agregar os objetivos do MOPRV.

Baseado nos resultados, os objetivos que normalmente são agregados no conjunto de instâncias testadas são  $f_3 + f_4$  e  $f_5 + f_6$ . Assim, podemos agregar estes objetivos com uma pequena perda na qualidade das soluções da estimativa de Pareto-Ótimo do problema original. Nós então, consideramos os objetivos agregados  $f_a = f_3 + f_4$  e  $f_b = f_5 + f_6$ . Quanto ao objetivo  $f_2$ , apresenta baixo conflito quando comparado com todos os outros objetivos. No entanto, quando se tem valores mais diversificados no conjunto de soluções para o número de veículos ( $f_2$ ), é mais comum agregar  $f_2$  à  $f_6$  por possuir um menor conflito. Como  $f_6$  já está em  $f_b = f_5 + f_6$ , agregamos  $f_2$  à  $f_b$ , por isso temos o objetivo composto  $f_c = f_b + f_2$ . O objetivo  $f_1$  apresenta um comportamento indefinido

a partir de um ponto de vista geral. Este objetivo é geralmente agregado em níveis mais altos da árvore com diferentes objetivos como  $f_3$ ,  $f_5$ ,  $f_a$  e  $f_b$ . Em diversos casos,  $f_1$  apresenta um baixo nível de harmonia com todos os outros objetivos do MOVRP, não sendo interessante agrega-lo com qualquer outro objetivo. Assim, propomos uma formulação reduzida do MOVRP considerando estas agregações e reduzindo o número de objetivos no problema de seis para três.

A formulação reduzida do MOVRP é definida pelas equações 15 (objetivo relacionado à distância), 16 (violação das janelas de tempo e tempo de espera dos veículos) e 17 (tamanho da rota mais longa, diferença entre a maior e a menor rota e número de rotas).

$$\text{Minimize } f_1 \quad (15)$$

$$\text{Minimize } f_a = \alpha f_3 + \lambda f_4 \quad (16)$$

$$\text{Minimize } f_c = \beta f_5 + \gamma f_6 + \epsilon f_2 \quad (17)$$

$\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$  e  $\epsilon$  são os pesos para os objetivos  $f_5$ ,  $f_6$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  e  $f_2$ , respectivamente.

#### 5.4. Otimizando o MOPRV Reduzido

O NSGA-II proposto foi utilizado para otimizar as 56 instâncias de Solomon [1987] no MOVRP Reduzido. Para a otimização do problema reduzido os seis objetivos originais do problema foram linearmente normalizados entre 0 e 1, sendo que o mesmo peso foi atribuído para os objetivos no somatório das funções  $f_a$  e  $f_c$ . Isto é,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$  e  $\epsilon$  receberam  $peso = 1$ . Assim, dado que o objetivo  $f_1$  não foi agregado à nenhum outro objetivo, este apresenta valores entre 0 e 1. O objetivo  $f_a$  apresenta a soma dos valores normalizados dos objetivos  $f_3$  e  $f_4$ , ou seja,  $f_a$  retorna valores entre 0 e 2. Por fim, o valor do objetivo  $f_c$  é igual ao somatório dos valores normalizados dos objetivos  $f_2$ ,  $f_5$  e  $f_6$ , resultando em soluções com valores que variam de 0 até 3.

Os resultados são apresentados em forma de gráficos em coordenadas polares. Para ilustrar os resultados, apresentamos os Gráficos Polares para 3 casos representativos, cada um de um subgrupo de instâncias (R, C e RC). A Figura 3 apresenta os resultados para as instâncias R101, C101 e RC101. Os resultados, no entanto, foram muito semelhantes para todas as instâncias testadas. Assim, os gráficos polares apresentaram três grupos de soluções para cada instância testada. Estes grupos são representados pelas linhas verdes, vermelhas, e azuis. Em geral, é possível notar nos gráficos que soluções com bons valores são encontradas para dois objetivos, uma vez que uma piora seja considerada no terceiro objetivo.

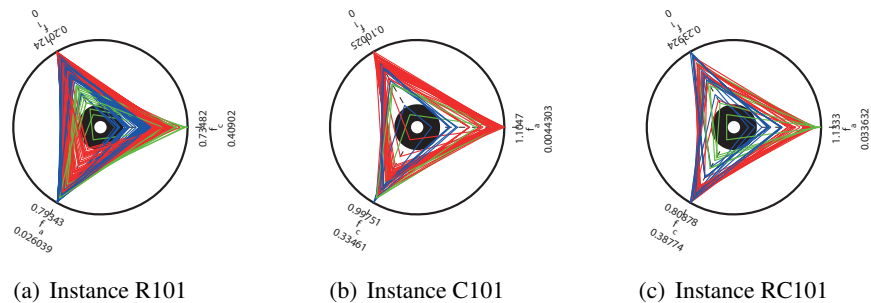


Figura 3: Gráficos Polares das instâncias do grupo R, C e RC para o MOVRP Reduzido

A medida que valores médios são encontrados para dois objetivos, o valor do terceiro objetivo melhora. Assim, outras opções de soluções são apresentadas. Estas não possuem os melhores valores para algum objetivo do problema, porém, apresentam valores que se aproximam dos melhores para os três objetivos estudados. Deste modo, fica a disposição do decisor escolher soluções com

valores muito bons para dois objetivos e valores ruins para o outro objetivo, ou escolher soluções que apresentam valores intermediários para todos os objetivos.

### 5.5. MOVRP Completo x MOVRP Reduzido

Esta seção verifica através de uma métrica denominada de Cobertura (C) se as soluções de Pareto encontradas para o problema reduzido são tão boas quanto as soluções encontradas para o problema completo. O propósito da métrica de cobertura é que um algoritmo com melhor desempenho retorne soluções com maior cobertura que o outro método utilizado na comparação. Assim sendo, a métrica de cobertura verifica qual o melhor desempenho entre dois conjuntos de soluções (conjunto Pareto), aquele conjunto que possui melhor desempenho é aquele que possui o menor número proporcional de soluções dominadas. Dadas duas fronteiras Pareto aproximadas A e B,  $C(A,B)$  calcula o número de soluções em B que são dominadas por alguma outra solução de A. A Equação 18 apresenta como se obtém o valor da cobertura dadas duas fronteiras Pareto aproximadas A e B.

$$C(A, B) = \frac{|y \in B : \exists x \in A, x \preceq y|}{|B|} \quad (18)$$

Para verificar a cobertura, escolhemos aleatoriamente uma fronteira Pareto do problema completo e uma fronteira Pareto do problema reduzido para cada instância testada. A fim de fazer a comparação, cada conjunto de soluções para o problema reduzido é mapeado de volta para as 6 dimensões do MOPRV. Ao analisar a medida de cobertura, foi observado que dentre as 56 instâncias de teste, em 36 oportunidades as soluções da frente de Pareto do problema reduzido (soluções retornadas pelo NSGA-II) dominaram mais soluções do problema completo (NSGA-III) do que foram dominadas. Em um único caso, a cobertura foi igual para ambas as aproximações de Pareto, nesta oportunidade nenhuma solução do problema completo, bem como do problema reduzido foi dominada. Entretanto, na maior parte das instâncias, soluções com melhor qualidade foram apresentadas para o problema reduzido. Ainda assim, para 13 instâncias de teste nenhuma solução gerada para o problema reduzido foi dominada por alguma solução do problema completo.

Outra estatística pode ser verificada através da média de soluções dominadas para as aproximações de Pareto geradas pelo NSGA-II e NSGA-III. Em média, considerando as 56 instâncias de teste, 33,32% das soluções de Pareto apresentadas pelo NSGA-III foram dominadas por alguma solução retornada pelo NSGA-II. Esta mesma medida foi verificada para o problema reduzido, e foi verificado que em média 15,49% das soluções retornadas pelo NSGA-II são dominadas por alguma outra solução retornada para o problema completo. Isto é, em média 84,51% das soluções apresentadas para o problema reduzido não são dominadas por nenhuma solução gerada para o problema completo. Isso indica que a perda na qualidade das soluções da frente de Pareto é muito pequena, o que torna viável a redução do MOVRP Completo. A viabilidade da redução do problema ainda é justificada pelo fato de que em muitos casos de teste, as soluções do problema reduzido não só são não dominadas, como dominam muitas soluções do problema completo. Isso significa que o problema reduzido ainda apresenta, em muitos casos, soluções melhores para os seis objetivos do MOVRP quando comparado com o problema completo.

## 6. Conclusão

Experimentos demonstraram que as soluções para o problema reduzido possuem bons valores para todos os objetivos quando comparado com as soluções do problema completo. Assim, conclui-se que muitos dos objetivos propostos para o MOVRP estão em harmonia e que podem ser agregados para reduzir o tamanho e a complexidade do problema.

Deste modo, nossa metodologia demonstrou que é capaz de otimizar problemas com muitos objetivos, uma vez que o fardo de estudar a agregação é muitas vezes menor do que o custo de otimizar todos os objetivos simultaneamente. Em outras palavras, os resultados demonstraram que é mais vantajoso visualizar a relação entre os objetivos do MOVRP e em seguida otimizar o problema com menos objetivos do que tentar otimizar o problema considerando todos os objetivos do

MOVSRP. Isto é, para o problema tratado, a utilização da Árvore de Agregação, para redução dos objetivos, e do NSGA-II, para otimização do problema com menos objetivos, se fez mais eficiente do que apenas aplicar o NSGA-III para a resolução do problema com todos os objetivos. Além do ganho na qualidade das soluções apresentadas quando se abordou o problema com menos objetivos, o custo de se utilizar a Árvore de Agregação em conjunto com o NSGA-II é muito menor do que utilizar um algoritmo tão complexo como o NSGA-III.

### Referências

- Baños, R., Ortega, J., Gil, C., Fernández, A., e de Toro, F. (2013). A simulated annealing-based parallel multi-objective approach to vehicle routing problems with time windows. *Expert Systems with Applications*, 40(5):1696 – 1707.
- Beham, A. (2007). Parallel tabu search and the multiobjective capacitated vehicle routing problem with soft time windows. In *Proceedings of the 11th International Conference on Computer Aided Systems Theory*, EUROCAST'07, p. 829–836. Springer-Verlag.
- Bhusiri, N., Qureshi, A. G., e Taniguchi, E. (2014). The trade-off between fixed vehicle costs and time-dependent arrival penalties in a routing problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 62(0):1 – 22.
- de Freitas, A. R., Fleming, P. J., e Guimarães, F. G. (2015). Aggregation trees for visualization and dimension reduction in many-objective optimization. *Information Sciences*, 298:288 – 314.
- Deep, K. e Mebrahtu, H. (2011). Combined mutation operators of genetic algorithm for the travelling salesman problem. *International Journal of Combinatorial Optimization Problems and Informatics*, 2(3):1–23.
- Karabulut, K. e Tasgetiren, M. F. (2014). A variable iterated greedy algorithm for the traveling salesman problem with time windows. *Information Sciences*, 279(0):383 – 395.
- Larsen, J. e Danmarks, T. (1999). Parallelization of the vehicle routing problem with time windows.
- Sivanandam, S. N. e Deepa, S. N. (2007). *Introduction to Genetic Algorithms*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition. ISBN 354073189X, 9783540731894.
- Solomon, M. M. (1987). Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operation Research*, 35(2):254–265.
- Sousa, J. C., Biswas, H. A., Brito, R., e Silveira, A. (2011). A multi objective approach to solve capacitated vehicle routing problems with time windows using mixed integer linear programming. *International Journal of Advanced Science and Technology*, p. 1–8.
- Yu, B., Yang, Z. Z., e Yao, B. Z. (2011). A hybrid algorithm for vehicle routing problem with time windows. *Expert Systems with Applications*, 38(1):435–441.